MATHEMATIQUES 2 - Filière TSI

Durée 4 Heures

Ce sujet comporte un problème d'Algèbre et un problème de Géométrie indépendants. De plus, dans le problème d'Algèbre, la partie I est indépendante des autres.

On note dans tout le problème, N et Z les ensembles des entiers naturels et relatifs et R et C les corps des nombres réels et complexes. $C^\infty(R,R)$ et $C^\infty(R,C)$ représentent les espaces vectoriels des applications de classe C^∞ de variable réelle à valeur réelle ou complexe.

ALGEBRE

Partie I

Soit $f_0 : \begin{matrix} R\to R \\ x\mapsto\cos(x) \end{matrix}$, $g_0 : \begin{matrix} R\to R \\ x\mapsto\sin(x) \end{matrix}$, $f_1 : \begin{matrix} R\to R \\ x\mapsto x\cos(x) \end{matrix}$, $g_1 : \begin{matrix} R\to R \\ x\mapsto x\sin(x) \end{matrix}$

Soit E = Vect(f_0, g_0, f_1, g_1), considéré comme sous espace vectoriel de $C^\infty(R,R)$.

I.1) Montrer que E est de dimension 4 et que (f_0, g_0, f_1, g_1) est une base notée $\boldsymbol{B}$.

I.2) On définit $\forall f, g \in E$, $< f, g > = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

Montrer que $< . , . >$ est un produit scalaire sur E.

I.3) Soit F = Vect(f_0, g_1) et G = Vect(g_0, f_1).

Montrer que F et G sont des supplémentaires orthogonaux de E.

I.4) Construire une base orthonormale de F et une base orthonormale de G.

I.5) En déduire une base orthonormale de E notée $\boldsymbol{B'}$.

Indication pour les question I.4) et I.5) : on donne $\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(t)\cos(t)dt = -\frac{\pi}{2}$,

$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos^2(t)dt = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}$, et $\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin^2(t)dt = \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}$.

Partie II

Soit $f_0 : \begin{matrix} R \to C \\ x \mapsto \cos(x) \end{matrix}$, $g_0 : \begin{matrix} R \to C \\ x \mapsto \sin(x) \end{matrix}$, $f_1 : \begin{matrix} R \to C \\ x \mapsto x\cos(x) \end{matrix}$, $g_1 : \begin{matrix} R \to C \\ x \mapsto x\sin(x) \end{matrix}$

Soit H = Vect(f_0, g_0, f_1, g_1), considéré comme sous espace vectoriel de $C^\infty(R,C)$.

II.1) Montrer que H est de dimension 4 et que (f_0, g_0, f_1, g_1) est une base notée **B**.

II.2) On considère φ définie par $\varphi(f) = f'$, pour $f \in$ H.
(f' désigne la dérivée première de f).
Montrer que φ définit un endomorphisme de H.

II.3) Déterminer **M**, la matrice de φ dans la base **B**.

II.4) Calculer $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}^2 + \mathbf{I}$, $(\mathbf{M}^2 + \mathbf{I})^2$ avec $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II.5) Soit $n \in N$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1)^2$, puis celui de la division de X^{2n} par $(X^2+1)^2$ et celui de la division de X^{2n+1} par $(X^2+1)^2$.

II.6) En déduire pour $n \in N$, les matrices $\mathbf{M}^{2n}$ et $\mathbf{M}^{2n+1}$ en fonction de **M** et de **I**.

II.7) Interpréter la dernière colonne de $\mathbf{M}^{2n}$ comme la dérivée $2n-ième$ d'une application qu'on déterminera. Peut-on retrouver ce résultat par une autre méthode ?

Partie III

Les notations et les espaces vectoriels considérés sont les mêmes qu'au II.

III.1) Déterminer les valeurs propres de φ.

III.2) φ est-elle diagonalisable ?

III.3) Monter qu'il existe une base **B'** de H,

qu'on déterminera, dans laquelle le matrice de φ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Partie IV

Les notations et les espaces vectoriels considérés sont les mêmes qu'au II.

IV.1) On considère T_α définie pour $f \in \mathrm{H}$ par $T_\alpha(f) = x f''(x) - \alpha f'(x) + x f(x)$ où f', f'' désignent les dérivées première et seconde de f.
Montrer que T_α définit un endomorphisme de H.

IV.2) Déterminer **N** et **N'** les matrices de T_α dans les bases **B** et **B'**.

IV.3) T_α est-elle diagonalisable ? Discuter selon les valeurs de α.

IV.4) Pour quelles valeurs de α l'équation différentielle $x y'' - \alpha y' + x y = 0$ admet-elle une solution non nulle dans H ?

GEOMETRIE

On considère R^3 muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit Γ la courbe définie par $\mathrm{M}(t)$: $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \\ z = \cos(2t) \end{cases}$ $t \in R$.

1) Etudier et tracer la projection de Γ sur xOy, on prendra 3 cm comme unité.

2) Etudier et tracer la projection de Γ sur xOz, avec la même unité.

3) Déterminer l'équation de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oz. Quelle est la nature de cette surface ?

4) Soit $t_0 \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$, montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 3\cos(t_0) \\ -3\sin(t_0) \\ 4 \end{pmatrix}$ est tangent à Γ en $\mathrm{M}(t_0)$.

5) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ -3\sin(t) \\ 4 \end{pmatrix}$ est tangent à Γ en $\mathrm{M}(t)$ dans tous les cas.

6) Déterminer une représentation paramétrique de la surface Σ constituée des tangentes à Γ quand t décrit R.

7) Déterminer l'ensemble des points de Σ où le plan tangent est parallèle au plan d'équation $4x - 3z = 0$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail